

# Etude numérique de la fusion d'un métal pur dans une enceinte avec une paroi chauffée glissante

MARCEL LACROIX

Département des sciences appliquées, Université du Québec à Chicoutimi, Chicoutimi, Québec,  
Canada G7H 2B1

(Reçu le 14 mars 1990 et sous forme finale le 27 août 1990)

**Résumé**—Une méthodologie numérique pour l'analyse du transfert de chaleur par convection mixte dans la phase liquide d'une substance pure en cours de fusion est présentée. Cette méthode est utilisée pour étudier l'effet de l'écoulement, engendré par le glissement d'une paroi chauffée, sur la fusion d'un métal pur (faible  $Pr$ ) confiné à une enceinte rectangulaire. Les résultats obtenus pour  $0.01 < Gr/Re^2 < 100$  montrent clairement l'influence de l'écoulement et de l'orientation relative des forces d'inertie et de gravité sur les taux de transfert de chaleur et la forme et le déplacement de l'interface solide-liquide. Bien que les taux soient maximisés lorsque les forces d'inertie sont parallèles aux forces de gravité et  $Gr/Re^2$  est faible, il demeure que les forces de gravité jouent un rôle prépondérant pour  $Gr/Re^2 \geq 0.2$ .

## INTRODUCTION

AU COURS des dernières années, plusieurs chercheurs se sont penchés sur la modélisation du problème de changement de phase solide-liquide. Ce problème suscite beaucoup d'intérêt à cause de ses innombrables applications pratiques en particulier dans les systèmes de stockage d'énergie et dans l'industrie métallurgique [1]. L'objectif ultime de la modélisation est d'approfondir les connaissances de ce phénomène afin de mieux contrôler et/ou d'améliorer les systèmes dans lesquels il se manifeste.

Il arrive fréquemment, lors de la fusion d'une substance, que les gradients de températures dans la phase liquide soient suffisamment élevés pour que les forces de gravité engendrent, sous l'effet de l'accélération gravitationnelle, des mouvements convectifs. Cet écoulement de la convection naturelle dans la phase liquide accroît le taux de transfert de chaleur et donc le taux de fusion et régit le déplacement et la déformation de l'interface solide-liquide. Les récents travaux expérimentaux de Bénard *et al.* [2], Ho et Viskanta [3] et Okada [4] sur la fusion de substances confinées à des cavités rectangulaires le démontrent clairement. Or, on ne peut modéliser un tel phénomène sans résoudre, en plus de l'équation d'énergie, les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement dans la phase liquide. Par surcroît, ces équations de conservation doivent être résolues dans un espace (phase liquide) dont les frontières sont irrégulières et bougent en fonction du temps. Quelques chercheurs ont proposé diverses méthodologies numériques pour analyser le problème de changement de phase solide-liquide en présence de convection naturelle dans une enceinte rectangulaire. Ramachandran *et al.* [5] ont étudié la solidification de substances dont les nombres de Prandtl varient entre 0,1 et 100. Les équations du mouvement sont

formulées en terme d'une fonction de courant et de vorticité et la position de l'interface solide-liquide est immobilisée à l'aide d'une transformation de variables proposée par Sparrow *et al.* [6]. Leur analyse s'attarde à l'effet du nombre de Rayleigh ( $5 \times 10^2 - 5 \times 10^5$ ), du nombre de Stefan (0,5-10) et du degré de sous-refroidissement sur le mouvement de l'interface solide-liquide. Par ailleurs, Gadgil et Gobin [7] ont étudié l'influence des mouvements convectifs à de grands nombres de Rayleigh ( $10^6 < Ra < 10^9$ ) sur la fusion de la paraffine ( $Pr = 50$ ). Le modèle résout les équations du mouvement écrites en variables primitives et l'approximation de quasi-stationnarité est adoptée pour immobiliser l'interface solide liquide. Ho et Viskanta [3] et Okada [4] ont fait de même en reformulant cependant les équations du mouvement en terme de fonctions de courant et de vorticité. Webb et Viskanta [8] ont également proposé une méthodologie pour analyser la fusion d'un métal pur (Gallium). Les équations de conservation sont r solv es dans des volumes de contrôle adaptés à la forme irrégulière du front de fusion. Un aspect intéressant de cette étude est que la transformation permettant d'immobiliser temporairement le front est effectuée non pas sur les équations différentielles mais sur les équations discr tiss es. Yoo et Rubinsky [9] ont abordé le problème de solidification de l'aluminium à l'aide d'une méthode d'éléments finis.

Récemment, l'auteur a proposé une méthode de transformation en coordonnées curvilignes généralisées permettant de suivre avec précision le déplacement et la forme complexe de l'interface solide-liquide [10]. Bien que l'idée ne soit pas nouvelle, sa mise en oeuvre est, nous le verrons dans la prochaine section, différente. Cette méthodologie a été utilisée avec succès pour étudier le problème de fusion de métaux purs en tenant compte de la convection naturelle [11], de la convection forcée et mixte

## NOMENCLATURE

$c$	chaleur massique du liquide
$f(y, t)$	position de l'interface solide-liquide
$g$	accélération gravitationnelle
$Gr$	nombre de Grashof, $g\beta(T_w - T_f)H^3/\nu^2$
$H$	hauteur de la cavité
$\Delta h$	chaleur latente de fusion
$J$	Jacobien de la transformation
$k$	conductivité thermique
$L$	largeur de la cavité
$n$	vecteur unitaire normal
$Nu$	nombre de Nusselt local
$\overline{Nu}$	nombre de Nusselt moyen
$Pr$	nombre de Prandtl, $\nu_1/\alpha_1$
$Re$	nombre de Reynolds, $V_0 H/\nu_1$
$S$	terme source (équations (1) et (9))
$Ste$	nombre de Stefan, $c(T_w - T_f)/\Delta h$
$t$	temps adimensionné, $t^*V_0/H$
$T_f$	température de fusion
$T_w$	température de la paroi chauffée
$U$	coefficient géométrique (équation (9))
$u$	vitesse horizontale adimensionnée, $u^*/V_0$
$V$	coefficient géométrique (équation (9))
$V_0$	vitesse de glissement de la paroi Ouest
$v$	vitesse verticale adimensionnée, $v^*/V_0$
$v_n$	vitesse normale du front
$x$	coordonnée adimensionnée, $x^*/H$
$y$	coordonnée adimensionnée, $y^*/H$

## Symboles grecs

$\alpha, \beta, \gamma$	coefficients géométriques (équation (9))
$\alpha_1$	diffusivité thermique
$\Gamma$	coefficient (équations (1) et (9))
$\eta$	coordonnée transformée
$\theta$	température adimensionnée, $(T - T_f)/(T_w - T_f)$
$\nu_1$	viscosité cinématique
$\xi$	coordonnée transformée
$\rho$	coefficient (équations (1) et (9))
$\tilde{\rho}$	rapport, $\rho_s/\rho_l$
$\phi$	variable dépendante (équations (1) et (9))
$\psi$	fonction de courant adimensionnée, $\psi^*/V_0 H$
$\omega$	fonction de vorticité adimensionnée, $\omega^* H/V_0$

## Indices et exposants

f	point de fusion
l	phase liquide
s	phase solide
w	paroi chauffée
w+1	noeud adjacent à la paroi chauffée
k	itération
*	indique une variable dimensionnée.

[12] et de l'effet combiné des forces de gravité et de la tension superficielle [13]. Ces deux dernières études ont démontré l'effet complexe résultant de la présence simultanée des forces d'inertie, de gravité et de tension superficielle sur le transfert de chaleur convectif dans la phase liquide de même que sur la forme et le déplacement de l'interface solide-liquide.

Le but du présent travail est de poursuivre ces travaux en analysant numériquement l'effet de l'écoulement, engendré par le glissement d'une paroi, sur la fusion d'un métal pur confiné à une enceinte rectangulaire. On formule tout d'abord le problème et le modèle numérique est présenté. On examine ensuite les cas pour lesquels la paroi se déplace parallèlement aux forces de gravité (vers le haut) et contrairement à celles-ci (vers le bas). On étudie, de plus, les cas où les forces d'inertie dominent l'écoulement (grandes vitesses de glissement), où les forces de gravité dominent l'écoulement (faibles vitesses de glissement) et où les forces d'inertie et de gravité sont du même ordre de grandeur (vitesses intermédiaires de glissement).

## FORMULATION DU PROBLEME

Soit un métal pur contenu dans une enceinte rectangulaire de hauteur  $H$  et de largeur  $L$  (Fig. 1). On

suppose, au départ, que le métal est à sa température de fusion  $T_f$ , ce qui permet de négliger la conduction dans la phase solide. Les parois Nord (P1), Sud (P3) et Est (P2) de l'enceinte sont adiabatiques. Au temps  $t = 0$ , la paroi Ouest (P4) se met à glisser soudainement vers le haut ou vers le bas et, au même instant, sa température est élevée à une valeur

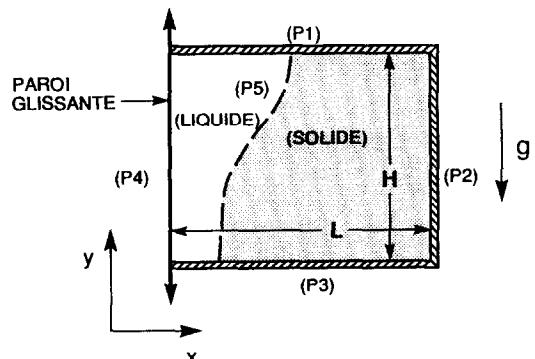


FIG. 1. Géométrie du problème de fusion. La ligne hachurée (P5) indique l'interface solide-liquide.

Tableau 1. Définition des paramètres de l'équation (1)

Fonction	$\phi$	$\rho$	$\Gamma$	$S(x, y)$
Courant	$\psi$	0	1	$\frac{\omega}{\rho}$
Vorticité	$\omega$	1	$1/Re$	$Gr/Re^2 \partial\theta/\partial x$
Température	$\theta$	1	$1/(Re Pr)$	0

$T_w > T_r$ . Pour les besoins de l'analyse, on admet de plus les hypothèses suivantes :

(1) Les propriétés thermophysiques de la phase liquide sont constantes sauf la densité qui, suppose-t-on, varie linéairement avec la température (approximation de Boussinesq).

(2) L'échauffement visqueux est négligeable devant les taux de transfert de chaleur entre la paroi chauffée et le métal.

(3) Le liquide est newtonien et incompressible.

(4) L'écoulement est laminaire et bidimensionnel.

Les équations adimensionnées de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie sont alors formulées en termes de fonction de courant, de vorticité et de température. Fondées en une seule équation générale de transfert, on les exprime ainsi :

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho u \phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \rho v \phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = S(x, y) \quad (1)$$

$\phi$  représente la variable dépendante soit le courant  $\psi$ , la vorticité  $\omega$  ou la température  $\theta$ .  $S(x, y)$  est un terme source,  $\Gamma$  est un coefficient d'échange et  $\rho$  une constante égale à 0 ou 1. Ces variables et paramètres sont définis au Tableau 1.

Les composantes de vitesses cartésiennes horizontales et verticales sont respectivement

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{et} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2)$$

La composante de vorticité  $\omega$  est définie comme

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3)$$

Admettant que la condition d'adhérence du fluide à une paroi solide est respectée, les conditions initiales et aux frontières sont :

$$\text{à } t = 0, \quad u = v = \psi = \omega = \theta = 0 \quad (4)$$

pour  $t > 0$

aux parois adiabatiques Nord et Sud (P1 et P3)

$$\psi = 0, \quad \omega = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0 \quad (5)$$

à l'interface solide-liquide (P5)

$$\psi = 0, \quad \omega = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \quad \theta = 0 \quad (6)$$

à la paroi glissante et chauffée (P4)

$$\psi = 0, \quad \omega = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \quad \theta = 1. \quad (7)$$

La position et la forme de l'interface solide-liquide ne sont pas spécifiées au départ. Toutefois, leur évolution est régie par une relation simple basée sur un bilan d'énergie thermique à l'interface. Négligeant la variation de la masse volumique du métal lors du changement de phase, on obtient

$$v_n = -\frac{Ste}{\tilde{\rho} Re Pr} \nabla \theta \cdot n \quad (8)$$

où  $v_n$  est la vitesse normale adimensionnée de l'interface solide-liquide et  $\nabla \theta \cdot n$  est le flux de chaleur normal à cette interface.

Les conditions d'écoulement et de transfert de chaleur sont entièrement caractérisées par quatre nombres sans dimension soit les nombres de Reynolds  $Re$ , de Grashof  $Gr$ , de Prandtl  $Pr$  et de Stefan  $Ste$ . Le nombre de Reynolds est basé sur la vitesse de glissement de la paroi Ouest  $V_o$  et la hauteur de la cavité  $H$ . Le nombre de Grashof est basé sur la différence des températures de la paroi chauffée Ouest et de l'interface solide-liquide ( $T_w - T_r$ ). Le nombre de Prandtl ne dépend que des propriétés physiques intrinsèques de la substance et caractérise l'épaisseur de la couche limite thermique par rapport à l'épaisseur de la couche limite dynamique. Le nombre de Stefan, également basé sur la différence de températures entre la paroi chauffée et l'interface, pondère la chaleur sensible par rapport à la chaleur latente. Enfin, le rapport  $Gr/Re^2$  permet d'estimer l'importance des forces de pesanteur vis-à-vis des forces d'inertie.

## TRANSFORMATION EN COORDONNÉES CURVILIGNES GÉNÉRALISÉES

Une difficulté que l'on retrouve fréquemment dans les calculs numériques par volumes et différences finis est l'imposition des conditions sur les frontières de formes arbitraires c'est-à-dire des frontières qui ne coïncident pas avec les noeuds du maillage. C'est le cas de l'interface solide-liquide dont la position et la forme complexe changent en fonction du temps. Une façon de contourner ce problème est de transformer les équations de conservation dans un repère de coordonnées curvilignes. Dans ce nouveau réseau, certaines lignes de coordonnées coïncident en tout temps avec les frontières géométriques du domaine physique. L'imposition des conditions aux frontières se fait alors naturellement et facilement.

La transformation proposée dans la présente étude est une transformation en coordonnées curvilignes généralisées. L'avantage de cette transformation est qu'elle est générale et non limitée à un cas particulier. Elle permet également de distribuer non unifor-

mément les noeuds du maillage de façon à concentrer plus de noeuds dans les régions où de forts gradients sont ressentis (couches limites). Enfin c'est une transformation couramment utilisée en calculs numériques appliqués à l'aéronautique [14].

À l'aide des règles de dérivées en chaînes, la transformation de l'équation générale de conservation (1) du repère cartésien  $(x, y)$  au repère curviligne généralisé  $(\xi, \eta)$  donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{1}{J} \left[ \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial t} \right] \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial \xi} + \frac{1}{J} \left[ \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial t} \right. \\ \left. - \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial t} \right] \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial \eta} + \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ (\rho U\phi) - \frac{\Gamma}{J} \left( \alpha \frac{\partial \phi}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) \right] \\ + \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ (\rho V\phi) - \frac{\Gamma}{J} \left( \gamma \frac{\partial \phi}{\partial \eta} - \beta \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) \right] = S(\xi, \eta). \quad (9) \end{aligned}$$

Le premier terme du membre de gauche exprime la variation de la propriété  $\phi$  dans le temps. Les deuxième et troisième termes tiennent compte du déplacement des noeuds du maillage ( $\partial x/\partial t$  et  $\partial y/\partial t$ ). Les quatrième et cinquième termes expriment la convection et la diffusion de la propriété  $\phi$  dans les directions  $\xi$  et  $\eta$  respectivement. Les coefficients géométriques  $U, V, \alpha, \beta, \gamma$  et le Jacobien  $J$  sont définis à l'annexe.

Le terme source  $S(\xi, \eta)$  apparaissant dans l'équation de vorticité devient

$$S(\xi, \eta) = \frac{Gr}{Re^2 J} \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right). \quad (10)$$

Les conditions aux frontières de Dirichlet pour la fonction de courant et la température demeurent, dans le repère  $(\xi, \eta)$  inchangées. Par contre, aux parois adiabatiques Nord et Sud (P1 et P3), les conditions pour la vorticité et la température deviennent

$$\omega = -\frac{\gamma}{J^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = \frac{\beta}{\gamma} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \quad (11)$$

et à l'interface solide-liquide (P5) et à la paroi glissante et chauffée (P4)

$$\omega = -\frac{\alpha}{J^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2}. \quad (12)$$

Enfin, en laissant glisser les noeuds à l'interface solide-liquide dans la direction  $\xi$ , la condition de Stefan (8) s'exprime comme

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{Ste}{\rho J Re Pr} \left[ \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right]. \quad (13)$$

## GENERATION DU MAILLAGE

Il existe diverses méthodes pour générer un maillage curviligne qui épouse parfaitement les frontières arbitraires du domaine physique [14]. Pour suivre l'évolution de la phase liquide dans un problème de fusion, Rieger *et al.* [15] et plus récemment Wu *et al.*

[16] génèrent un maillage en résolvant numériquement deux équations différentielles elliptiques. La solution de ces équations donne les coordonnées physiques des noeuds distribués dans l'espace courbe occupé par la phase liquide. Bien qu'elle soit très rigoureuse, cette approche est néanmoins très coûteuse puisque le système d'équations de mailles doit être résolu à chaque fois que l'interface solide-liquide se déplace, c'est-à-dire à chaque nouvel intervalle de temps.

Une alternative consiste à générer algébriquement le maillage curviligne. Cette méthode est doublement intéressante puisque d'une part les temps de calcul dédiés à cette opération sont infimes et d'autre part les coefficients géométriques (annexe) sont estimés analytiquement, donc précisément.

Les expressions algébriques adoptées ici sont des expressions exponentielles qui permettent de concentrer,    volonté, les noeuds du maillage à proximité des parois solides. Ainsi, pour les lignes parallèles à l'axe des  $x$ , on pose

$$y = a_y \left[ \exp \left( \frac{\eta-1}{b_y} \right) - 1 \right] \quad \text{où } 1 < \eta < \frac{N-1}{2} + 1 \quad (14)$$

et pour les lignes parallèles à l'axe des  $y$ , on pose

$$x = f(y, t) \left\{ a_x \left[ \exp \left( \frac{\xi-1}{b_x} \right) - 1 \right] \right\} \quad \text{où } 1 < \xi < \frac{M-1}{2} + 1 \quad (15)$$

$N$  et  $M$  représentent le nombre de noeuds dans les directions  $y$  et  $x$  respectivement. La moitié restante des noeuds horizontaux et verticaux est générée de façon à ce que leur distribution soit symétrique par rapport à  $y = 1/2$  et  $x = f(y, t)/2$  respectivement.  $f(y, t)$  est la position de l'interface solide-liquide. Les paramètres  $b_y$  et  $b_x$  contrôlent la concentration des noeuds dans les directions  $y$  et  $x$  respectivement. Plus ils sont petits, plus les noeuds sont comprimés à proximité des parois. Leurs valeurs varient généralement entre 5 (forte concentration des noeuds au voisinage des parois) et 10 000 (distribution uniforme des noeuds). Les paramètres  $a_y$  et  $a_x$  sont simplement ajustés de façon à ce que  $y = 0.5$  et  $x = f(y, t)/2$  pour  $\eta = (N-1)/2 + 1$  et  $\xi = (M-1)/2 + 1$  respectivement.

   l'aide des distributions (14) et (15), les quatre coefficients géométriques de base (annexe) apparaissant dans l'équation générale de transfert (9) sont estimés analytiquement :

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = 0 \quad (16)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{a_y}{b_y} \exp \left( \frac{\eta-1}{b_y} \right) \quad (17)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{a_x}{b_x} f(y, t) \exp\left(\frac{\xi - 1}{b_x}\right) \quad (18)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = a_x \left[ \exp\left(\frac{\xi - 1}{b_x}\right) - 1 \right] \frac{\partial f}{\partial \eta}(y, t). \quad (19)$$

Seule la dérivée  $\partial f / \partial \eta$  apparaissant dans l'équation (19) est approchée numériquement à l'aide d'une différence centrée du deuxième ordre à l'interface solide-liquide.

**SOLUTION NUMERIQUE**

L'équation générale de transfert (9) est résolue numériquement à l'aide d'une méthode aux différences finies. En intégrant cette équation dans un volume de contrôle du plan transformé ( $\xi, \eta$ ) (Fig. 2) et en regroupant les termes, on obtient l'équation aux différences suivantes :

$$ASW \cdot \phi_{SW} + AS \cdot \phi_S + ASE \cdot \phi_{SE} + AW \cdot \phi_W + AP \cdot \phi_P + AE \cdot \phi_E + ANW \cdot \phi_{NW} + AN \cdot \phi_N + ANE \cdot \phi_{NE} = Q. \quad (20)$$

Les détails de cette intégration et les coefficients apparaissant dans cette équation sont donnés dans la référence [17]. Les termes géométriques témoignant de la non-orthogonalité du maillage sont compris dans les coefficients ASW, ASE, ANW et ANE. Le terme  $Q$  contient le terme source  $S(\xi, \eta)$  et la valeur  $\phi_p^n$ , c'est-à-dire la valeur  $\phi_p$  au temps précédent. Les termes convectifs et diffusifs apparaissant dans les coefficients AS, AW, AP, AE et AN sont discrétisés à l'aide du schéma de la loi de puissance de Patankar [18] afin d'assurer la stabilité numérique lorsque les termes convectifs dominent les termes diffusifs.

L'équation (20) est résolue itérativement pour  $\theta, \omega$  et  $\psi$  à l'aide d'une méthode de relaxation alternée par colonnes (colonnes  $\xi$  croissantes) et par lignes (lignes  $\eta$  décroissantes).

Les conditions aux frontières de la vorticité (11) et (12) sont approximées à l'aide de différences décen-

trées du deuxième ordre. Par exemple, la valeur de la vorticité sur la paroi Ouest  $\omega_w$  en fonction du courant aux noeuds voisins de la paroi est donnée par :

$$\omega_w = \frac{\alpha}{J_w^2} (3.5\psi_w - 4\psi_{w+1} + 0.5\psi_{w+2}) \mp \frac{3\alpha}{J(\partial y / \partial \eta)_w}. \quad (21)$$

Le signe - ou + apparaissant devant le dernier terme de cette expression indique que la paroi Ouest glisse vers le haut ou vers le bas respectivement. La vitesse de glissement est, rappelons le, la vitesse caractéristique.

Enfin, à l'aide des distributions (14) et (15) et des coefficients géométriques (16)-(19), la condition de Stefan (13) discrétisée est

$$f^k(y, t^{n+1}) = \left[ f^2(y, t^n) - \frac{2Ste}{\tilde{\rho} Re Pr} \frac{b_x}{a_x} \Delta t \left( \frac{\partial \theta}{\partial \xi_n} \right) \right]^{1/2}. \quad (22)$$

$\Delta t$  représente l'intervalle de temps. L'expression  $(\partial \theta / \partial \xi)_n$  est estimée à l'interface solide-liquide à l'aide d'une différence décentrée du deuxième ordre de la température  $\theta$ .

Un aspect important de la présente méthode de calcul est, contrairement à d'autres études [2, 3, 7, 8], que l'hypothèse de quasi-stationnarité n'est pas adoptée. Les deuxième et troisième termes de l'équation (9) sont retenus. La position de l'interface solide-liquide est déterminée implicitement en résolvant itérativement les équations de champ (20) et la condition de Stefan (22). Par exemple, au temps  $t^{n+1}$  une première position de l'interface  $f^{k=1}(y, t^{n+1})$  est prédite tout simplement par extrapolation des positions au temps  $t^n$  et  $t^{n-1}$ . Les équations de champ (20) sont alors résolues donnant une première estimation  $\theta^{n+1,k=1}$ . La solution  $\theta^{n+1,k=1}$  permet alors d'estimer, avec la condition de Stefan (22), une position améliorée  $f^{k=2}(y, t^{n+1})$  de l'interface. On reprend à nouveau les calculs en retenant cette nouvelle position améliorée et on poursuit ainsi au temps  $t^{n+1}$  jusqu'à ce que  $|f^k(y, t^{n+1}) - f^{k-1}(y, t^{n+1})| < \epsilon$ ,  $\epsilon$  étant un critère de convergence ( $\epsilon \cong 10^{-3}$ ). Habituellement, deux à trois itérations sont nécessaires, en particulier au début de la fusion (quand la vitesse de déplacement de l'interface est grande), pour satisfaire la condition de convergence. Quand plus de trois itérations sont requises pour satisfaire la condition  $\epsilon$ , l'intervalle de temps  $\Delta t$  choisi est probablement trop grand et le réduire, i.e.  $\Delta t / 2$  corrige en général la situation.

L'algorithme résumant les grandes étapes de calcul est illustré à la Fig. 3.

Le présent modèle numérique a été, à maintes reprises, confronté à des résultats expérimentaux, validé et appliqué avec succès à divers problèmes de changement de phase. Il a permis, entre autre, d'analyser l'effet de la convection naturelle lors de la fusion du gallium [10, 11] et de l'aluminium [19]. Il a également servi à étudier la fusion d'aluminium en présence de convection mixte et forcée [12, 20] et à déterminer l'influence de la tension superficielle vis-à-vis les forces de gravité [13].

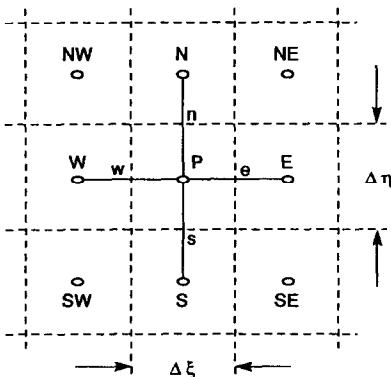


FIG. 2. Volume de contrôle dans le plan transformé ( $\xi, \eta$ ).

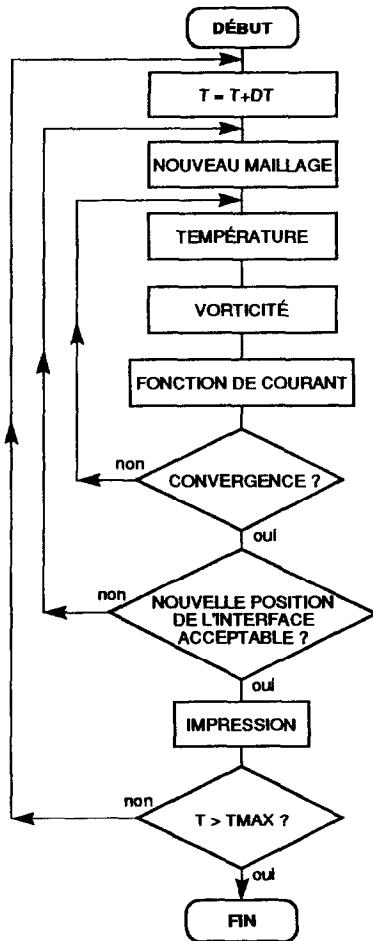


FIG. 3. Algorithme global.

## EXPERIENCES NUMERIQUES

Afin d'étudier l'effet de l'écoulement, engendré à la fois par le glissement d'une paroi chauffée et les forces de gravité, sur la fusion d'une substance métallique pure confinée à une enceinte rectangulaire, 10 cas ont été retenus. Ces cas sont définis au Tableau 2.

Tableau 2. Cas étudiés

Cas no.	$V_0$ (mm s <sup>-1</sup> )	$Re$	$Gr/Re^2$	Convection dominante
H10	240.0	8790	0.01	(forcée)
B10	-240.0	8790	0.01	
H40	53.6	1966	0.2	(mixte)
B40	-53.6	1966	0.2	
H20	24.0	879	1.0	(mixte)
B20	-24.0	879	1.0	
H50	11.0	393	5.0	(mixte)
B50	-11.0	393	5.0	
H30	2.4	88	100.0	(naturelle)
B30	-2.4	88	100.0	

Tableau 3. Principales propriétés de l'aluminium

$\rho = 2385 \text{ kg m}^{-3}$
$\mu = 1.3 \times 10^{-3} \text{ N s m}^{-2}$
$C_p = 1080 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
$k = 94.03 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$
$\beta = 117.0 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$
$\Delta h = 3.99 \times 10^5 \text{ J kg}^{-1}$

Le métal choisi est l'aluminium. Ses principales propriétés sont données au Tableau 3.

L'enceinte a une hauteur  $H = 2 \text{ cm}$  et une largeur  $L = 4 \text{ cm}$ . La différence de température  $T_w - T_f$  est  $25 \text{ K}$ . Dans ces conditions, les nombres de Grashof, Prandtl et Stefan sont respectivement  $7.726 (10^5)$ ,  $1.49 (10^{-2})$  et  $6.75 (10^{-2})$ . Le nombre de Reynolds dépend de la vitesse avec laquelle la paroi Ouest glisse. Cette vitesse est positive lorsque la paroi glisse vers le haut et négative dans la direction opposée. Dans les cas no. 10, la vitesse est grande ( $V_0 = \pm 240 \text{ mm s}^{-1}$ ) et les forces d'inertie dominent nettement les forces de gravité ( $Gr/Re^2 = 0.01$ ). Dans les cas no. 30, la vitesse de glissement est faible ( $V_0 = \pm 2.4 \text{ mm s}^{-1}$ ) et les forces de gravité dominent les forces d'inertie ( $Gr/Re^2 = 100$ ). Enfin, dans les cas no. 40, no. 20 et no. 50, la vitesse de glissement varie entre  $\pm 53.6$  et  $\pm 11.0 \text{ mm s}^{-1}$  et les forces d'inertie et de gravité sont du même ordre de grandeur ( $Gr/Re^2$  varie entre 0.2 et 5.0).

Bien que dans les cas no. 10 la grandeur du nombre de Reynolds porte à croire que l'écoulement soit turbulent, nous admettons néanmoins qu'il demeure laminaire.

Suite à plusieurs expériences numériques visant à déterminer l'influence du maillage sur la solution du problème, un maillage constitué de 25 noeuds répartis non-uniformément dans la direction horizontale et 31 noeuds répartis non-uniformément dans la direction verticale a été choisi. Ce maillage est suffisamment fin pour résoudre adéquatement les forts gradients qui prévalent au voisinage des parois solides et assez grossier pour assurer des temps de calculs raisonnables (moins de 30 min CPU) avec un ordinateur SUN4-360. Les facteurs de concentrations  $h_y$  et  $h_x$  (équations (14) et (15)) sont constants et égaux à 8.0.

## RESULTATS ET DISCUSSIONS

Les Figs. 4-8 illustrent les champs de vitesses et de températures prédits après 10, 30, 60 et 120 s de fusion pour les cas no. 10, no. 40, no. 20, no. 50 et no. 30 respectivement. Les cas sont présentés dans l'ordre établi au Tableau 2 c'est-à-dire pour un rapport  $Gr/Re^2$  croissant. Les lignes isothermes correspondent de gauche à droite et dans toutes les figures, à  $\theta = 1.0$ , 0.833, 0.666, 0.5, 0.333, 0.166 et 0. Les dimensions horizontales et verticales des cavités sont proportionnées.

Dans les Fig. 4, les forces d'inertie dominent net-

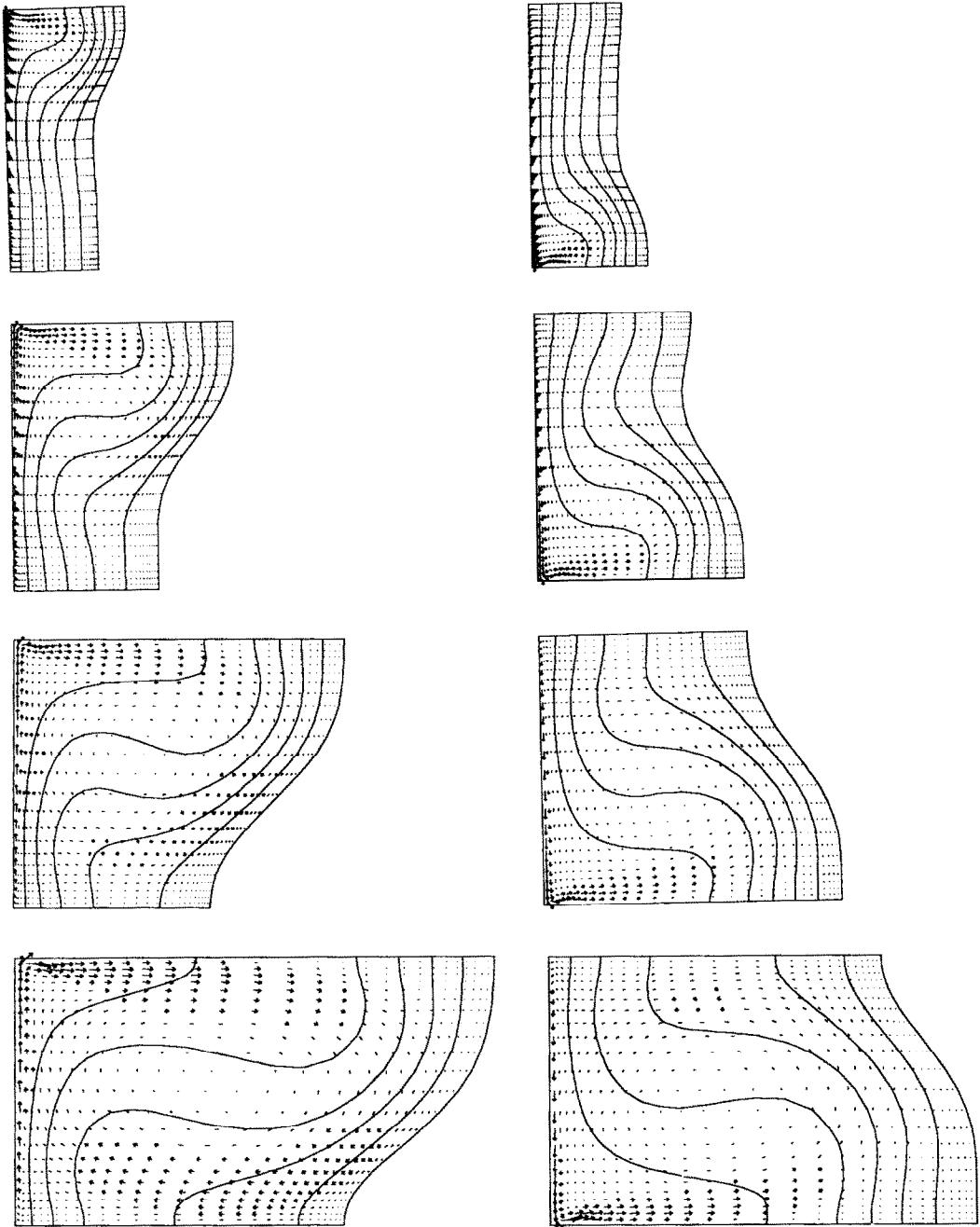


FIG. 4. Champs d'écoulement pour les cas H10 (colonne de gauche) et B10 (colonne de droite);  $Gr/Re^2 = 0.01$ .

tement les forces de pesanteur ( $Gr/Re^2 = 0.01$ ) et un renversement du sens du glissement de la paroi Ouest provoque un renversement presque symétrique du champ d'écoulement par rapport à un axe horizontal. Malgré le fait que les forces d'inertie soient 100 fois plus importantes que les forces de gravité, on note une légère asymétrie causée par l'orientation relative de ces forces : dans le cas no. H10, elles sont parallèles et

dans le cas no. B10 elles sont opposées. Dans ce dernier cas, l'opposition des forces d'inertie et de gravité atténue légèrement les gradients de températures au voisinage de l'interface solide-liquide par rapport au cas précédent ce qui, nous le verrons un peu plus loin, ralentit le phénomène de fusion.

À l'autre extrême (Fig. 8), c'est-à-dire dans les cas où les forces de gravité dominent largement les forces

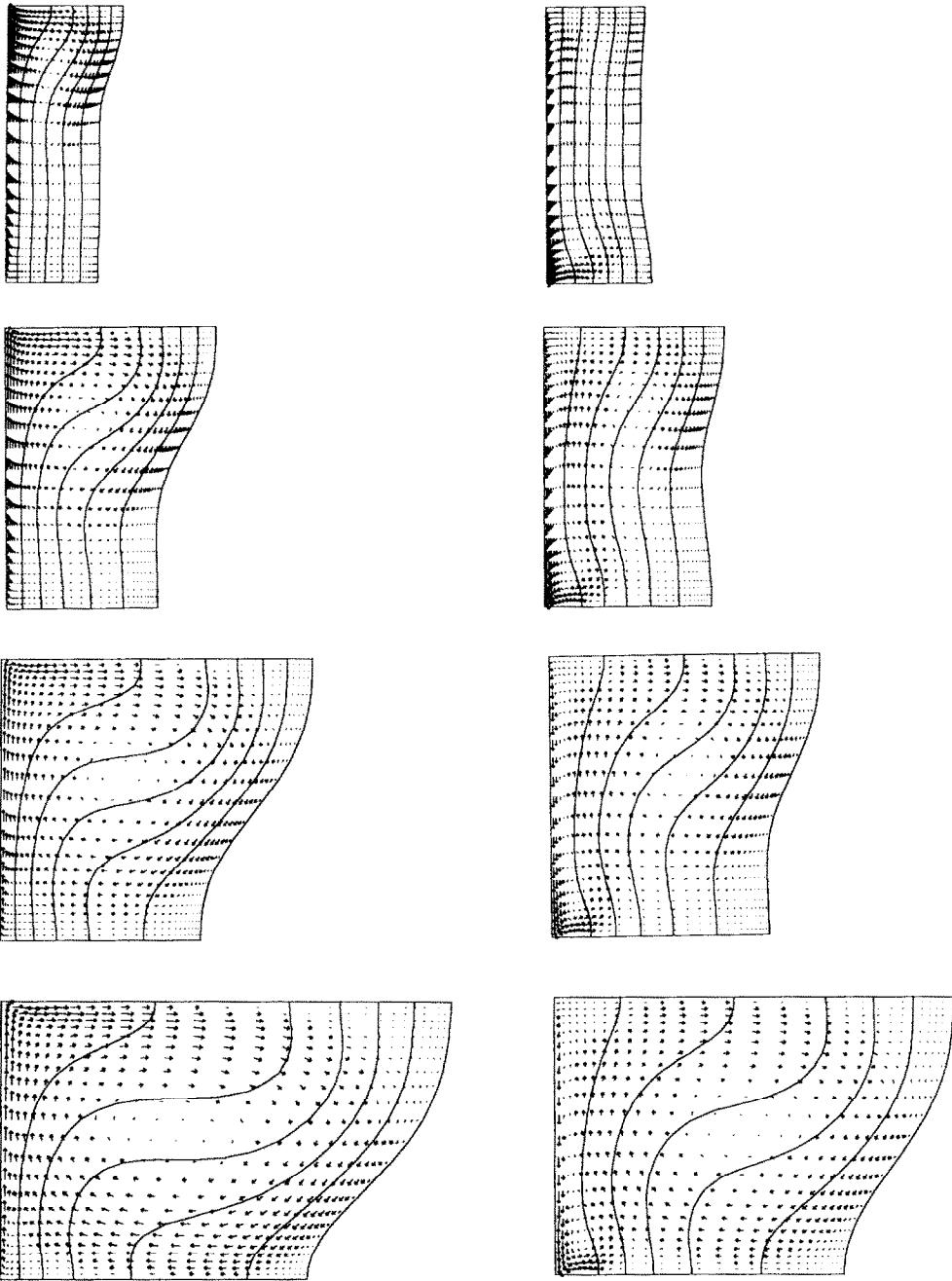


FIG. 5. Champs d'écoulement pour les cas H40 (colonne de gauche) et B40 (colonne de droite);  $Gr/Re^2 = 0.02$ .

d'inertie ( $Gr/Re^2 = 100$ ), les champs d'écoulement sont, à peine, perturbés par le sens du glissement de la paroi Ouest. Par contre la progression du front de fusion dans les cas no. H30 et no. B30 est nettement plus lente dans les cas no. H10 et no. B10, les gradients de températures en son voisinage étant plus faibles. Cela ne surprend guère compte tenu de l'ordre de grandeur relatif des vitesses d'écoulement qui prévalent dans

ces cas : la vitesse moyenne des écoulements dans les cas no. H10 et B10 est dix fois plus grande que la vitesse moyenne des écoulements dans les cas no. H30 et B30.

Dans les Figs. 5-7, les forces d'inertie et de gravité sont du même ordre de grandeur et le transfert de chaleur se fait par convection mixte.

Dans la Fig. 5, le sens du glissement de la paroi Ouest ( $Gr/Re^2 = 0.2$ ) joue un rôle primordial sur les

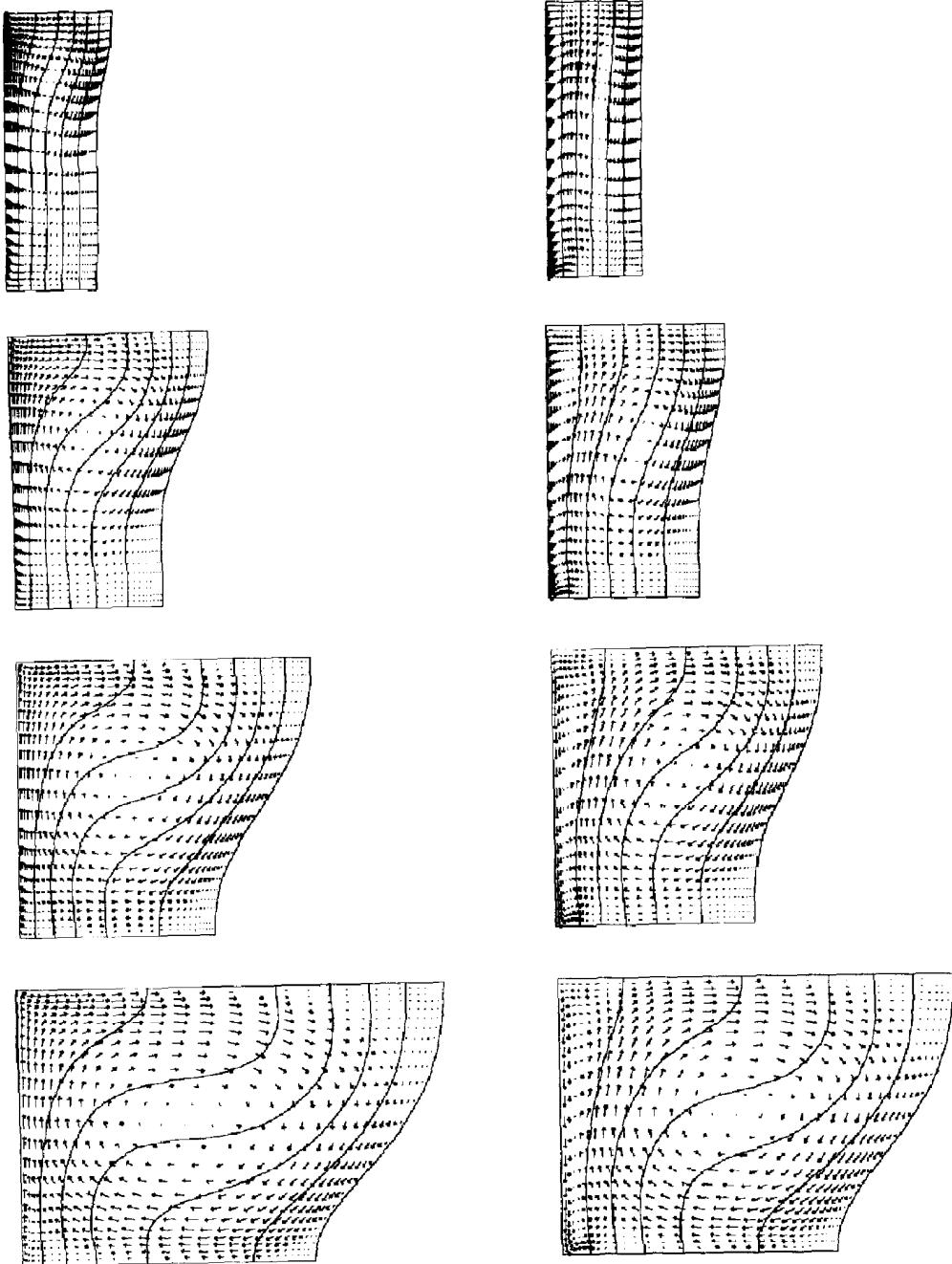


FIG. 6. Champs d'écoulement pour les cas H20 (colonne de gauche) et B20 (colonne de droite);  $Gr/Re^2 = 1.0$ .

champs d'écoulement et, corollairement, sur la progression du front de fusion. Pour le cas no. H40, les forces d'inertie sont parallèles aux forces de gravité ce qui engendre des vitesses importantes dans le haut de la cavité et de forts gradients de températures au voisinage de la partie supérieure de l'interface solide-liquide. Il en résulte, dès le début, une progression plus rapide de la partie supérieure du front de fusion. D'autre part, lorsque la paroi Ouest glisse vers le bas,

cas no. B40, les forces d'inertie s'opposent aux forces de gravité. Au cours des premières secondes de fusion ( $< 10$  s), la largeur de la cavité est petite comparée à sa hauteur et les forces d'inertie dominent les forces de gravité. L'effet d'entraînement du fluide par la paroi glissante crée une zone de recirculation anti-horaire qui couvre toute la partie inférieure de la cavité acheminant ainsi le fluide chaud vers l'interface solide-liquide froide. C'est ce qui explique la progression

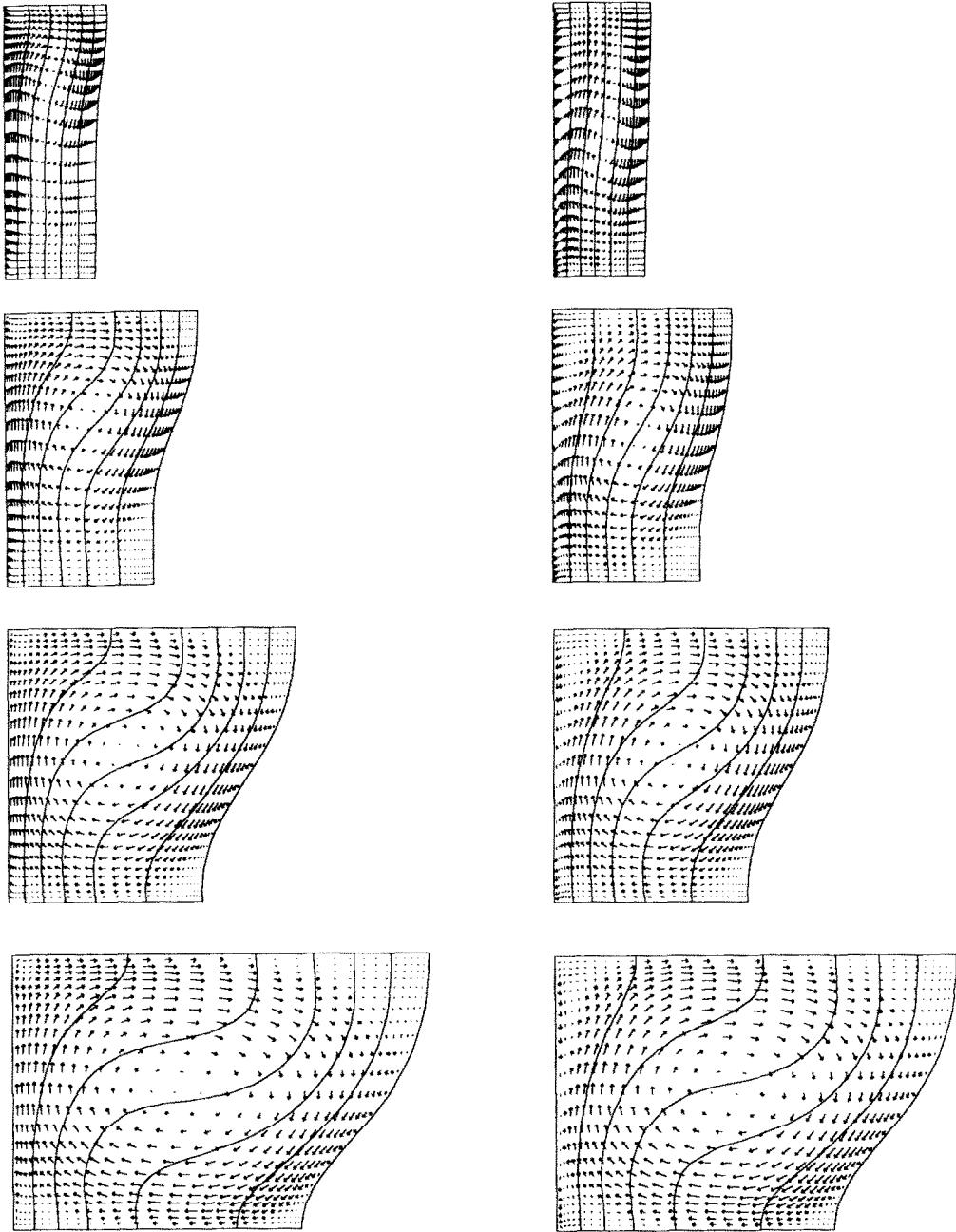


FIG. 7. Champs d'écoulement pour les cas H50 (colonne de gauche) et B50 (colonne de droite);  $Gr/Re^2 = 5.0$ .

plus rapide de la partie inférieure du front dans les premiers instants. Au fur et à mesure que le front se déplace vers la droite, la largeur de la cavité grandit mais la largeur de cette zone de recirculation demeure constante et son effet sur le champ d'écoulement et le mouvement de l'interface solide-liquide diminue graduellement. Les forces de gravité prennent le pas sur les forces d'inertie, malgré le rapport  $Gr/Re^2 = 0.2$ , et une grande zone de recirculation horaire s'établit dans la partie droite de la cavité.

Après 30 s, on voit que les forces de pesanteur ont déjà renversé la tendance des premiers instants: la partie supérieure du front se déplacera désormais plus rapidement que la partie inférieure.

Dans les cas no. 20 et no. 50 (Figs. 6 et 7), la vitesse de glissement de la paroi Ouest est davantage réduite. L'écoulement se comporte de la même façon que dans les cas no. 40 sauf que les forces d'inertie étant plus faibles devant les forces de gravité, elles jouent un rôle de plus en plus marginalisé.

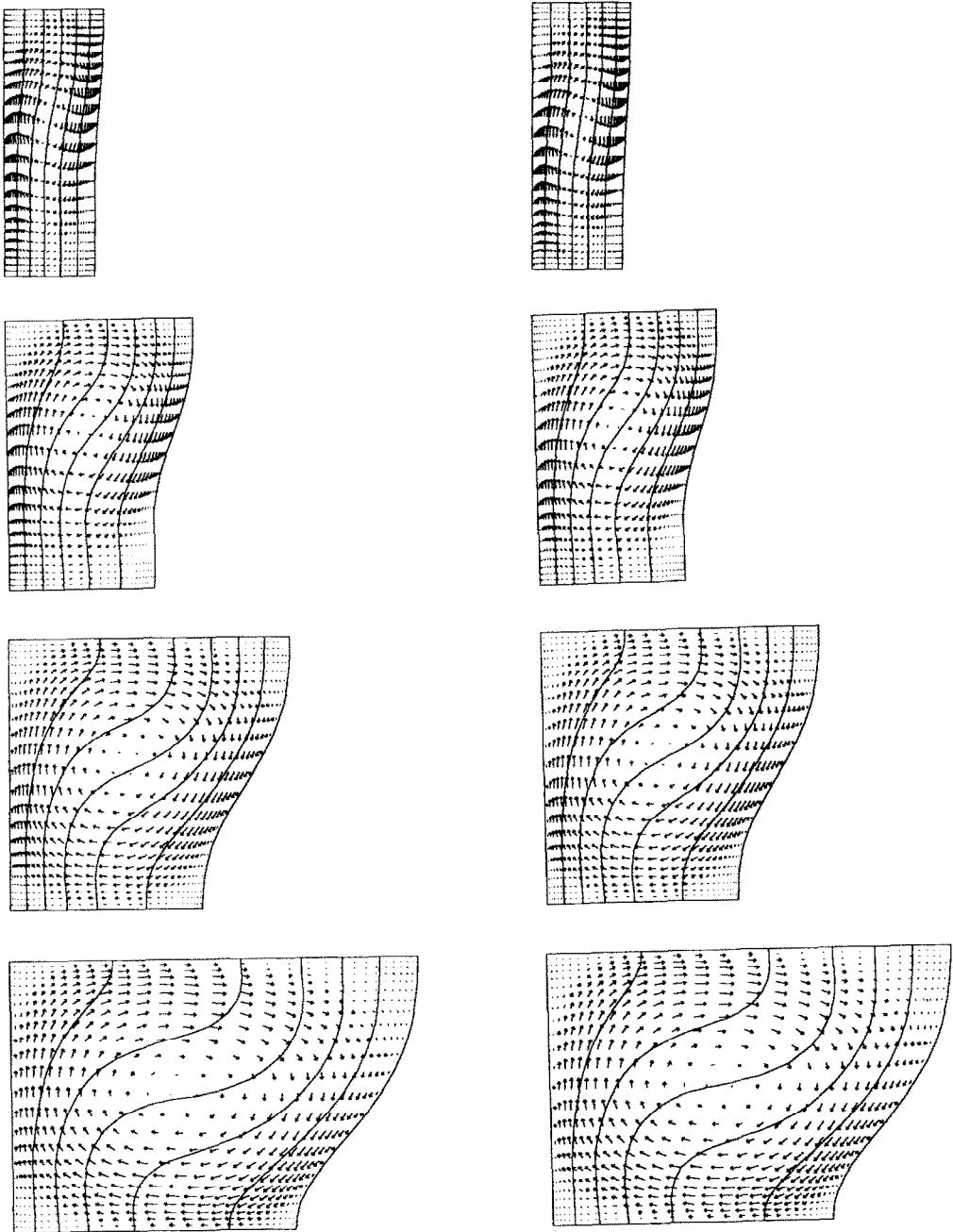


FIG. 8. Champs d'écoulement pour les cas H30 (colonne de gauche) et B30 (colonne de droite);  $Gr/Re^2 = 100.0$ .

La Fig. 9 montre les positions et les vitesses de déplacement de l'interface solide-liquide après 60 et 120 s de fusion. Dans tous les cas, on note que la progression du front est plus lente lorsque les forces d'inertie sont opposées aux forces de gravité (cas no. B) et cette tendance est d'autant plus marquée que le rapport  $Gr/Re^2$  est faible. Pour un cas donné, les vitesses de déplacement de l'interface décroissent, bien entendu, avec le temps puisque la largeur de la cavité grandit et en conséquence les gradients de tem-

pératures diminuent (équation (13)). De plus, ces vitesses de déplacement de l'interface demeurent, dans tous les cas, beaucoup plus faibles que les vitesses moyennes d'écoulement: l'ordre de grandeur de ces dernières est, dans les cas no. 10, de  $100 \text{ mm s}^{-1}$  et, dans les cas no. 30, de  $10 \text{ mm s}^{-1}$ . L'hypothèse de quasi-stationnarité pour l'interface solide-liquide retenue par nombre de chercheurs est justifiée [2, 3, 7, 8].

Enfin, tel que le démontre la Fig. 10, la vitesse

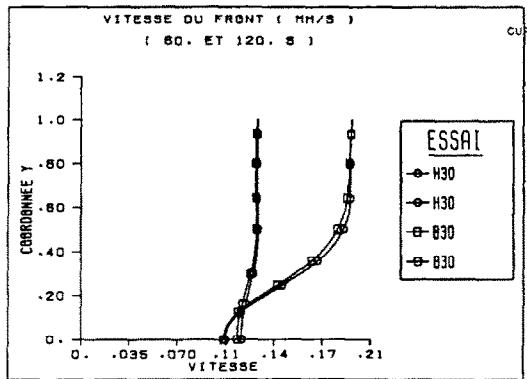
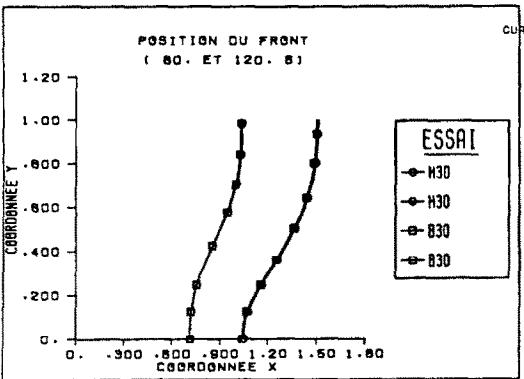
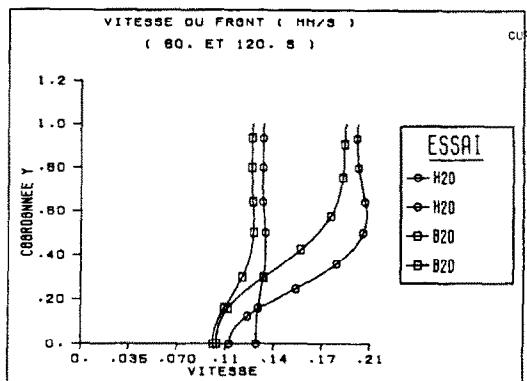
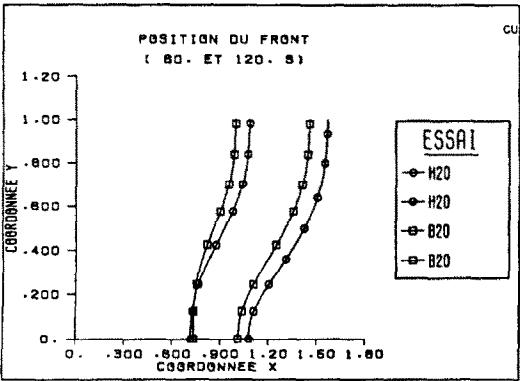
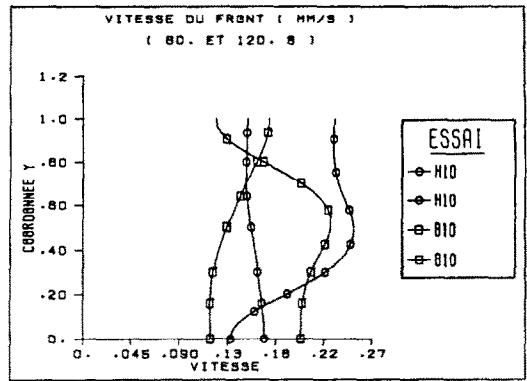
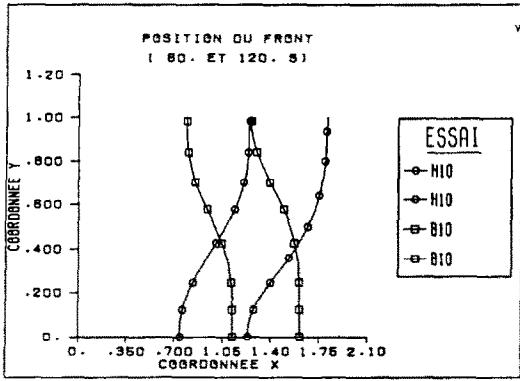


Fig. 9. Positions et vitesses de déplacement de l'interface solide-liquide après 60 et 120 s pour  $Gr/Re^3 = 0.01, 1.0$  et  $100$ .

maximale de déplacement le long de l'interface est atteinte au point où le flux de chaleur est également maximal (équation (13)). La Fig. 10 illustre les variations des coefficients de transfert de chaleur locaux (nombres de Nusselt) à l'interface solide-liquide après 10, 30, 60 et 120 s pour tous les cas étudiés. Le nombre de Nusselt est défini comme

$$Nu = -grad \theta$$

soit en coordonnées curvilignes généralisées (plan transformé  $(\zeta, \eta)$ )

$$Nu = -\frac{\sqrt{x}}{J} \frac{\partial \theta}{\partial \zeta}$$

Une différence décentrée du deuxième ordre est employée pour approcher la dérivée.

Encore une fois, on peut constater que les

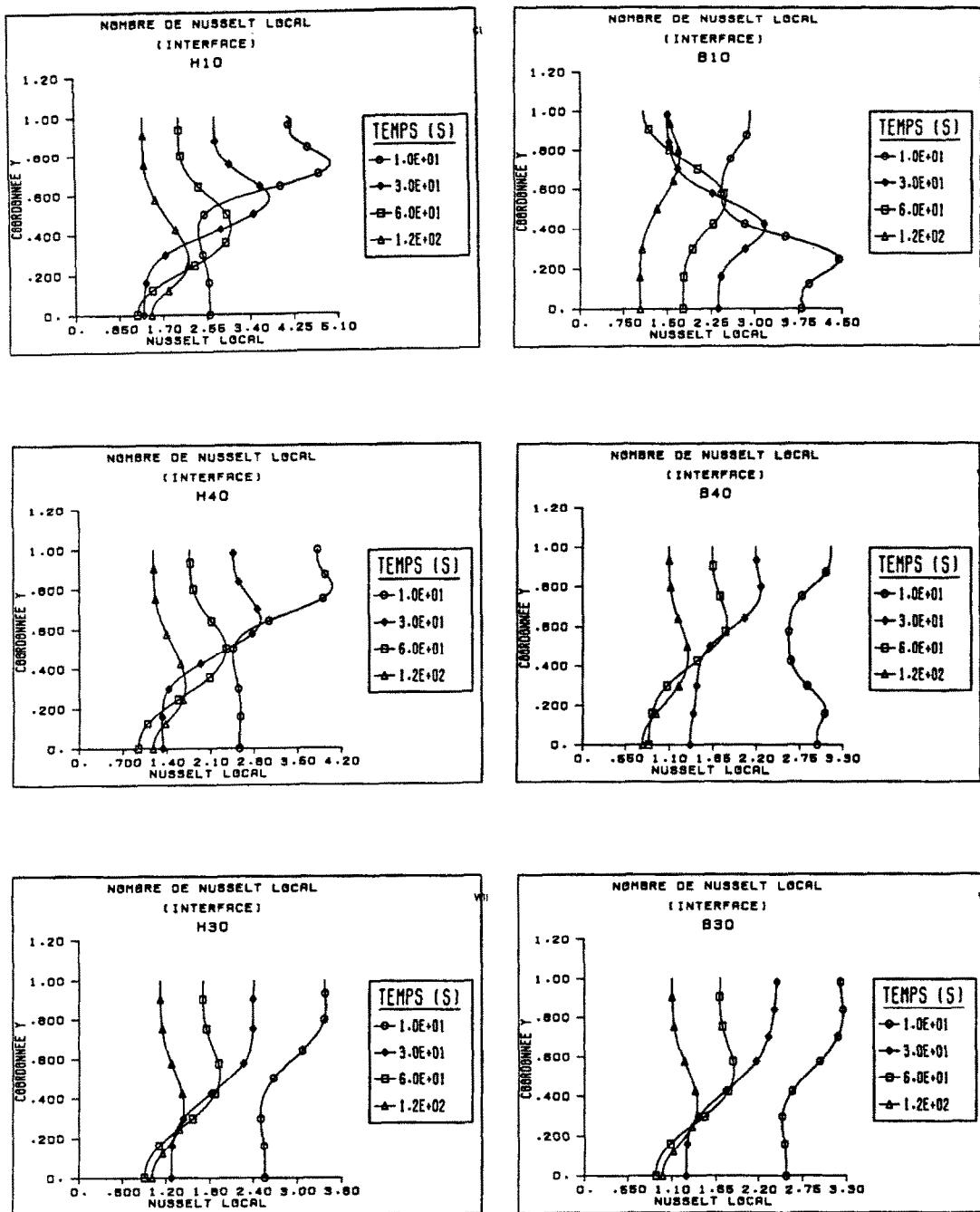


FIG. 10. Coefficients de transfert de chaleur locaux à l'interface solide-liquide après 10, 30, 60 et 120 s pour  $Gr/Re^2 = 0.01, 0.2$  et  $100$ .

coefficients de transfert de chaleur à l'interface sont, dans tous les cas, plus grands lorsque les forces d'inertie sont parallèles aux forces de gravité et ce d'autant plus que le rapport  $Gr/Re^2$  est faible. On note également la variation complexe du nombre de Nusselt local dans le cas no. B40 résultant, tel qu'expliqué précédemment, du développement de l'écoulement au cours des premiers instants de fusion.

Le coefficient de transfert de chaleur moyen à l'interface,

$$\overline{Nu} = - \int_0^1 \frac{\sqrt{\alpha}}{J} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} d\eta$$

est porté en fonction du temps dans la Fig. 11 et la fraction de métal fondu correspondant, i.e.

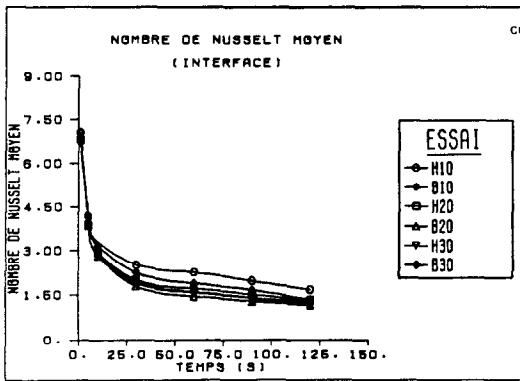


FIG. 11. Variation du coefficient moyen de transfert de chaleur à l'interface solide-liquide.

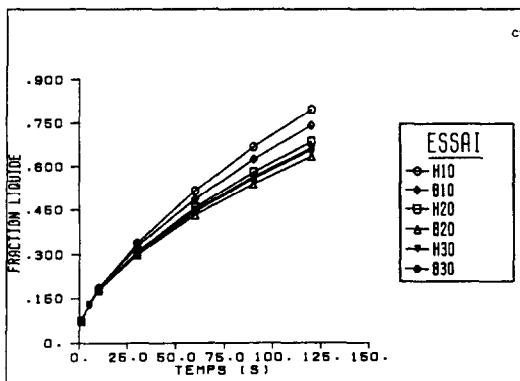


FIG. 12. Fraction de métal fondu versus temps.

$$\frac{H}{L} \int_0^1 f(y, t) dy$$

est illustrée dans la Fig. 12. Les tendances locales observées se reflètent bien entendu sur l'aspect global : de grandes forces d'inertie parallèles aux forces de gravité (cas no. H10) favorisent au maximum le transfert de chaleur accélérant ainsi le taux de fusion. Cependant, malgré le fait que la vitesse de glissement de la paroi Ouest soit 100 fois plus grande dans les cas no. 10 que dans les cas no. 30, on constate que les taux de transfert de chaleur et la fraction de métal fondu après deux minutes sont à peine environ 15% plus élevés.

### CONCLUSIONS

Une méthodologie numérique pour l'analyse du transfert de chaleur par convection mixte lors de la fusion d'une substance pure a été présentée. Cette méthode a ensuite été utilisée pour étudier l'effet du glissement d'une paroi chauffée sur la fusion d'un petit bloc d'aluminium confiné à une enceinte rectan-

gulaire. Les résultats obtenus montrent clairement l'influence de l'écoulement et de l'orientation des forces d'inertie par rapport aux forces de gravité sur les taux de transfert de chaleur et par conséquent sur la forme et le déplacement de l'interface solide-liquide. Pour un rapport  $Gr/Re^2$  constant, ces taux sont plus élevés si les forces d'inertie sont parallèles aux forces de gravité. Sauf dans les cas où ce rapport est très faible ( $Gr/Re^2 = 0.01$ ), les forces de gravité jouent néanmoins un rôle important dans l'écoulement et la fusion de la substance.

*Remerciements*—L'auteur exprime sa gratitude au conseil de recherche en sciences naturelles et en génie du Canada qui a subventionné ce travail.

### REFERENCES

1. R. Viskanta, Heat transfer during melting and solidification of metals, *J. Heat Transfer* **110**, 1205-1219 (1988).
2. C. Bénard, D. Gobin and F. Martinez, Melting in rectangular enclosures: experiments and numerical simulations, *J. Heat Transfer* **107**, 794-803 (1985).
3. C. J. Ho and R. Viskanta, Heat transfer during melting from an isothermal vertical wall, *J. Heat Transfer* **106**, 12-19 (1984).
4. M. Okada, Analysis of heat transfer during melting from a vertical wall, *Int. J. Heat Mass Transfer* **27**, 2057-2066 (1984).
5. N. Ramachandran, J. P. Gupta and Y. Jaluria, Thermal and fluid flow effects during solidification in a rectangular enclosure, *Int. J. Heat Mass Transfer* **25**, 187-194 (1982).
6. E. M. Sparrow, S. V. Patankar and S. Ramadhyani, Analysis of melting in the presence of natural convection in the melt region, *J. Heat Transfer* **99**, 520-526 (1977).
7. A. Gadgil and D. Gobin, Analysis of two-dimensional melting in rectangular enclosures in presence of convection, *J. Heat Transfer* **106**, 20-26 (1984).
8. W. A. Webb and R. Viskanta, Analysis of heat transfer during melting of a pure metal from an isothermal vertical wall, *Numer. Heat Transfer* **9**, 539-558 (1986).
9. J. Yoo and R. Rubinsky, A finite element method for the study of solidification processes in the presence of natural convection, *Int. J. Numer. Meth. Engng* **23**, 1785-1805 (1986).
10. M. Lacroix, Computation of heat transfer during melting of a pure substance for an isothermal wall, *Numer. Heat Transfer* **15B**, 191-210 (1989).
11. M. Lacroix and V. R. Voller, Finite difference solutions of solidification phase change problems: transformed vs fixed grids, *Numer. Heat Transfer* **17B**, 25-41 (1990).
12. M. Lacroix, Analysis of mixed convection melting of a pure metal, *Numer. Heat Transfer* **17A**, 401-416 (1990).
13. M. Lacroix, Effects of buoyancy and surface tension forces on the melting of a metal, *Numer. Heat Transfer*, to be published.
14. C. A. J. Fletcher, *Computational Techniques for Fluid Dynamics*, Vol. II, Chap. 13. Springer, Berlin (1988).
15. H. Rieger, U. Projahn and H. Beer, Analysis of the heat transport mechanisms during melting around a horizontal circular cylinder, *Int. J. Heat Mass Transfer* **25**, 137-147 (1982).
16. Y. K. Wu, M. Prud'homme et T. H. Nguyen, Etude numérique de la fusion autour d'un cylindre vertical soumis à deux types de conditions limites, *Int. J. Heat Mass Transfer* **32**, 1927-1938 (1989).
17. M. Lacroix, Etude numérique du problème de changement de phase en présence de convection naturelle,

Report IS-88-02, Université du Québec à Chicoutimi (July 1988).

18. S. Patankar, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. Hemisphere, Washington, DC (1980).
19. M. Lacroix, Analysis of natural-convection-dominated melting heat transfer inside an inclined rectangular enclosure, Fifth Int. Symp. on Numerical Methods in Engng, Lausanne, Switzerland, September 1989, Abstracts, pp. 699-704 (1989).
20. M. Lacroix, Mixed convection melting of pure substances, 9th Int. Heat Transfer Conf., Jerusalem, Israel, 19-24 August (1990).

#### ANNEXE

Coefficients géométriques de l'équation (9)

$$U = \hat{\sigma}\psi/\hat{\sigma}\eta$$

$$V = -\hat{\sigma}\psi/\hat{\sigma}\xi$$

$$\alpha = \left(\frac{\hat{\sigma}x}{\hat{\sigma}\eta}\right)^2 + \left(\frac{\hat{\sigma}y}{\hat{\sigma}\eta}\right)^2$$

$$\beta = \frac{\hat{\sigma}x}{\hat{\sigma}\xi} \frac{\hat{\sigma}x}{\hat{\sigma}\eta} + \frac{\hat{\sigma}y}{\hat{\sigma}\xi} \frac{\hat{\sigma}y}{\hat{\sigma}\eta}$$

$$\gamma = \left(\frac{\hat{\sigma}x}{\hat{\sigma}\xi}\right)^2 + \left(\frac{\hat{\sigma}y}{\hat{\sigma}\xi}\right)^2$$

$$J = \frac{\hat{\sigma}x}{\hat{\sigma}\xi} \frac{\hat{\sigma}y}{\hat{\sigma}\eta} - \frac{\hat{\sigma}x}{\hat{\sigma}\eta} \frac{\hat{\sigma}y}{\hat{\sigma}\xi}$$

#### NUMERICAL STUDY OF THE MELTING OF A PURE METAL FROM AN ISOTHERMAL SLIDING WALL

**Abstract**—A computational methodology is presented for the problem of mixed convection melting of a pure metal from an isothermal vertical sliding wall. The influence of the flow, driven by combined inertia and buoyancy forces, on the melting process is studied. Results for  $0.01 \leq Gr/Re^2 \leq 100$  show the effect of the relative magnitude and orientation of inertia and buoyancy forces on the heat transfer rates and the shape and the advance of the solid-liquid interface. In spite of the fact that the highest melting rates are obtained when the inertia forces are parallel to buoyancy forces and the ratio  $Gr/Re^2$  is small, buoyancy forces play a key role for  $Gr/Re^2 \geq 0.2$  in the melting process.

#### NUMERISCHE UNTERSUCHUNG DES SCHMELZENS REINER METALLE AN EINER ISOTHERMEN GLEITENDEN WAND

**Zusammenfassung**—Das Schmelzen eines reinen Metalls bei Misch-Konvektion an einer isothermen senkrechten gleitenden Wand wird mit Hilfe eines Rechners untersucht. Von besonderem Interesse ist der Einfluß der trägheits- und auftriebsgesteuerten Strömung auf den Schmelzvorgang. Die Ergebnisse im Bereich  $0,01 < Gr/Re^2 < 100$  zeigen die Einflüsse der relativen Größe und Wirkungsrichtung der Trägheits- und Auftriebskräfte auf den Wärmeübergang sowie auf Form und Fortschreiten der Fest-/Flüssig-Grenzfläche. Trotz der Tatsache, daß die höchste Schmelzrate dann erreicht wird, wenn Trägheits- und Auftriebskraft parallel gerichtet sind und das Verhältnis  $Gr/Re^2$  klein ist, spielen die Auftriebskräfte bei  $Gr/Re^2 \geq 0,2$  die Schlüsselrolle.

#### ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПЛАВЛЕНИЯ ЧИСТОГО МЕТАЛЛА ОТ ИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ СКОЛЬЗЯЩЕЙ СТЕНКИ

**Аннотация**—Описывается численная методика решения задачи плавления чистого металла при смешанной конвекции от изотермической нагретой скользящей стенки. Исследуется влияние течения, вызванного совместным действием инерционных и подъемных сил, на процесс плавления. Результаты, полученные для  $0,01 < Gr/Re^2 < 100$ , показывают влияние относительной величины и ориентации инерционных и подъемных сил на скорости теплопереноса, а также на форму и перемещение границы раздела твердое тело-жидкость. Несмотря на то, что максимальные скорости плавления достигаются, когда инерционные силы параллельны подъемным и величина отношения  $Gr/Re^2$  невелика, подъемные силы играют главную роль в процессе плавления при  $Gr/Re^2 \geq 0,2$ .